BrainOnTube
Conocimiento al Alcance de Todos

Diferenciación

v. 1.0.0

Mg. Fausto Mauricio Lagos Suárez

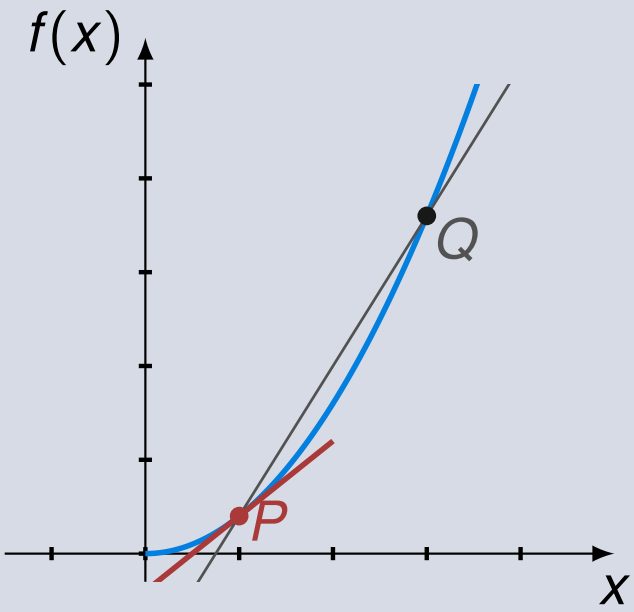
13 de abril de 2017

Contenido

¿Qué es una derivada?
Interpretación Geométrica

¿Qué es la derivada?
Interpretación geométrica

Encontrar la recta tangente a una función $y = f(x)$ en un punto $P(x_0, y_0)$



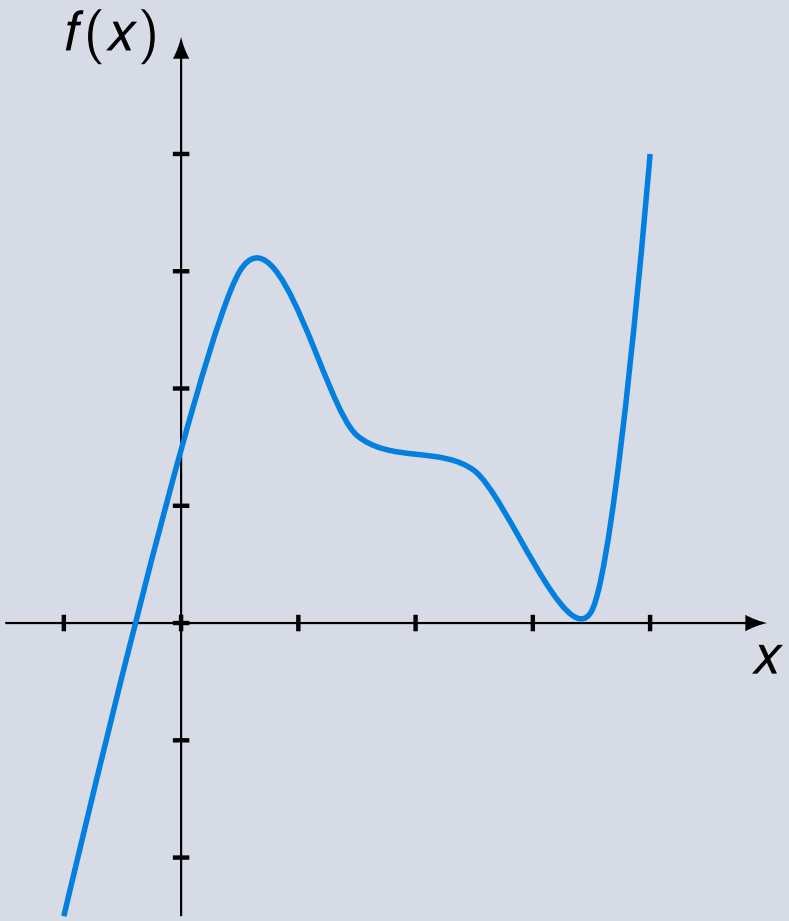
la derivada es la **pendiente** de la recta tangente a una función $y = f(x)$ en un punto $P(x_0, y_0)$.

Importante!!!

$$m = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

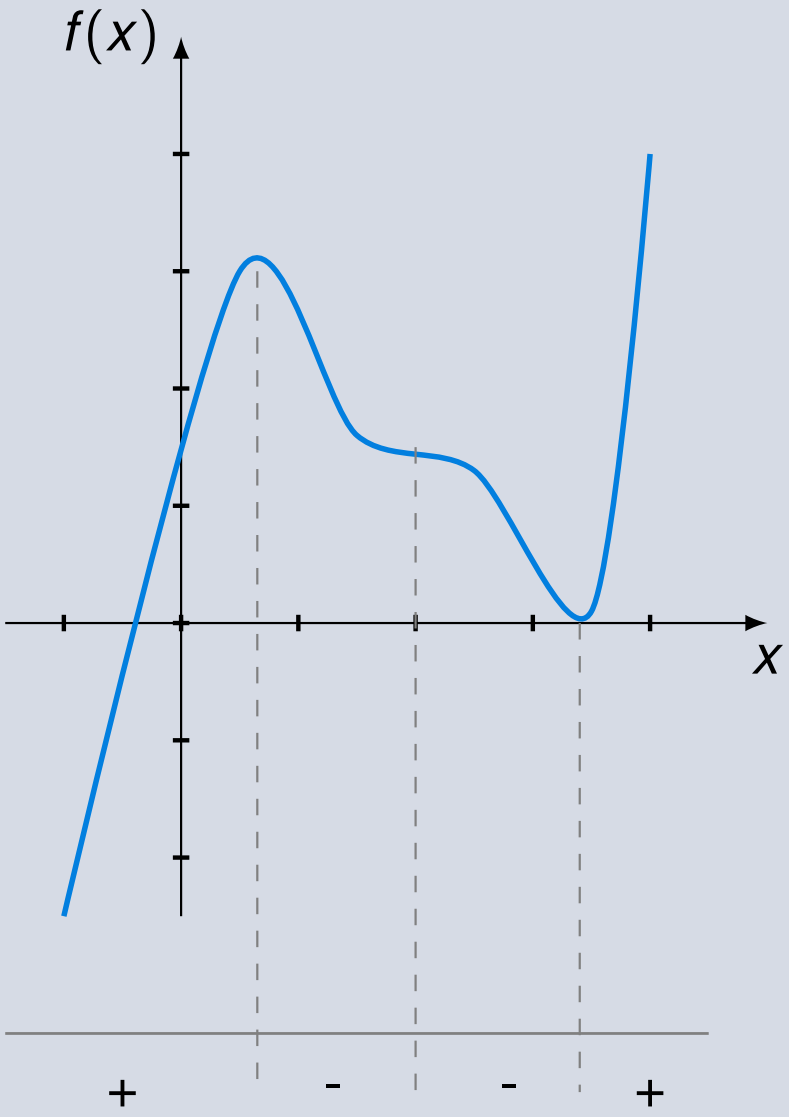
¿Cómo determinar la derivada?

Ejemplo 1: Determinación gráfica de $f'(x)$



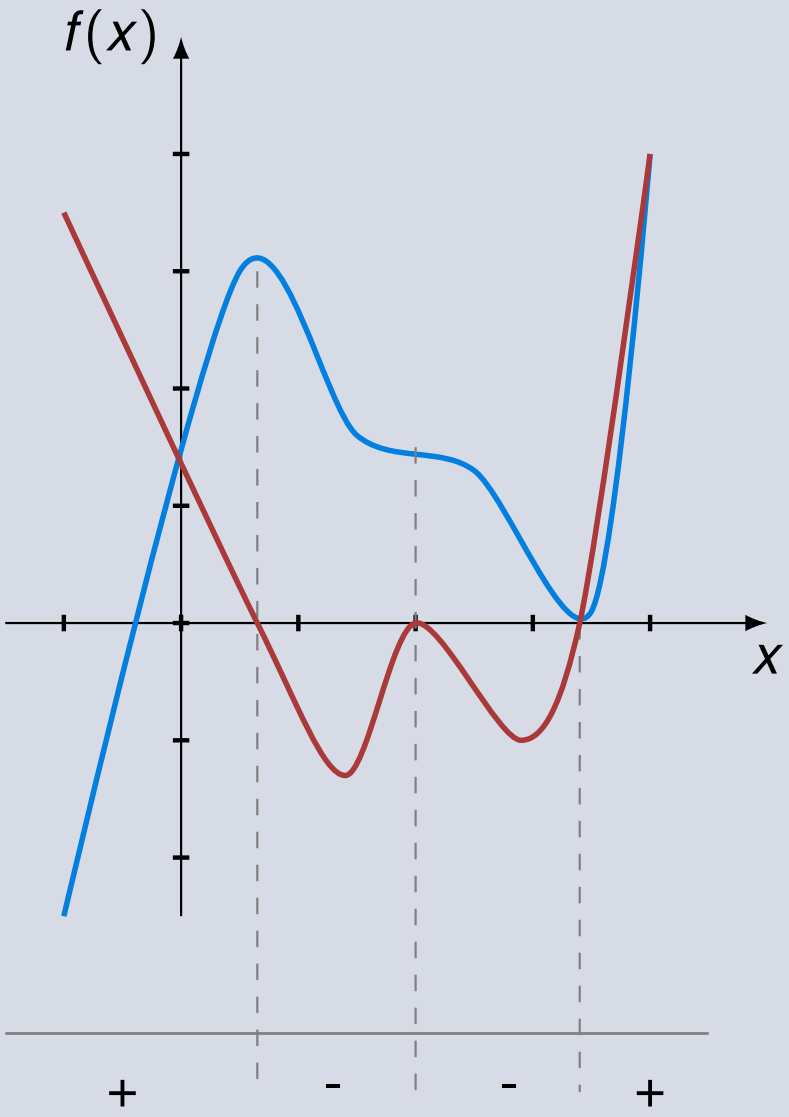
¿Cómo determinar la derivada?

Ejemplo 1: Determinación gráfica de $f'(x)$



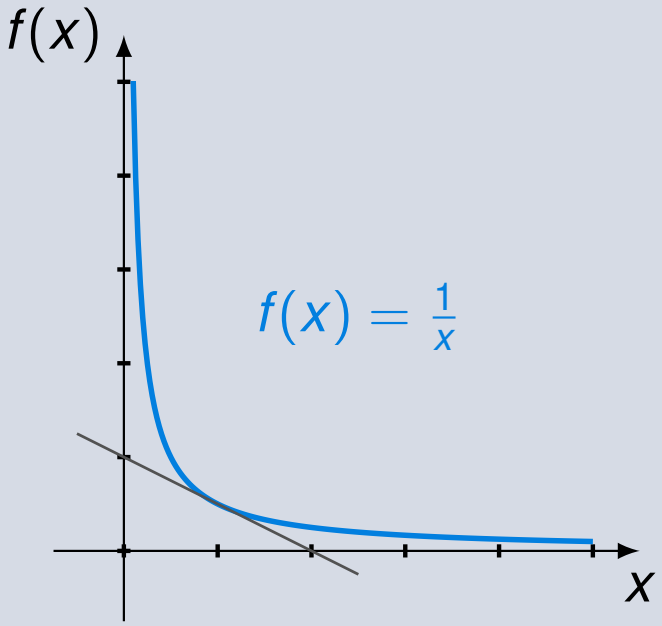
¿Cómo determinar la derivada?

Ejemplo 1: Determinación gráfica de $f'(x)$



Pendiente de la recta tangente

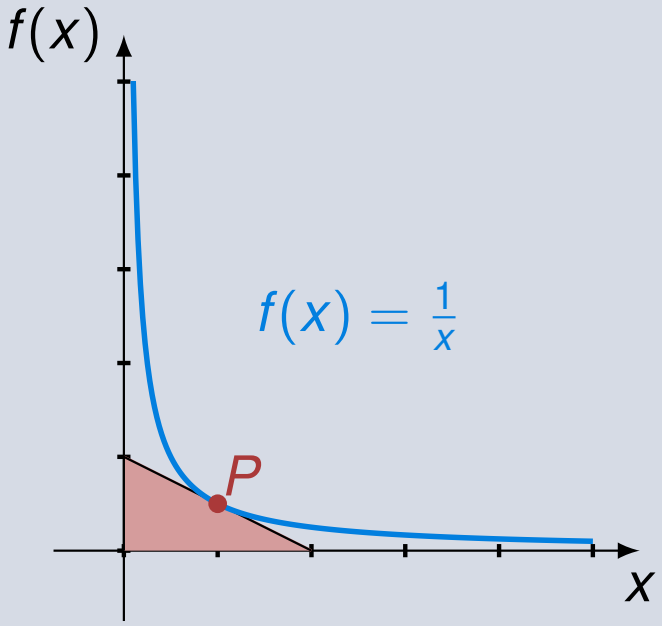
Ejemplo 2: La pendiente de la tangente a $f(x) = \frac{1}{x}$



$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}\right) \\
&= -\frac{1}{x^2}
\end{aligned}
$$

El signo de la pendiente de la recta tangente siempre será negativo y a medida que $x \to \infty$ la pendiente será más y más "pequeña" i.e $m = f'(x) \to 0$.

¿Cuál es el área de los triángulos formados por los ejes y la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$?



Siendo la pendiente de la tangente a f a través de $P(x_0, y_0)$, $m = -\frac{1}{x^2}$; la ecuación de la tangente es

$$y = -\frac{1}{x_0^2}(x - x_0) + y_0$$

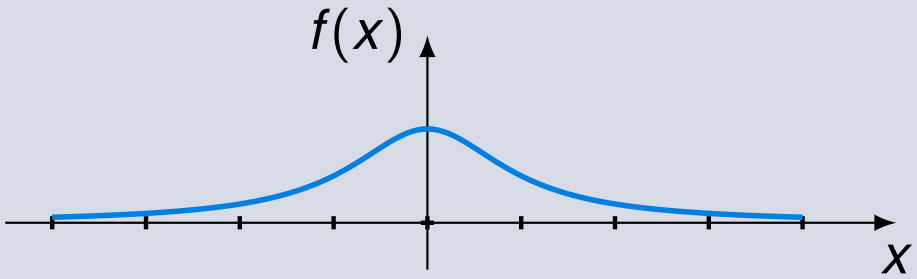
entonces los intersecos con los ejes son respectivamente $(2x_0, 0)$ y $(0, 2y_0)$ con lo cual el área del triángulo es

$$A = 2.$$

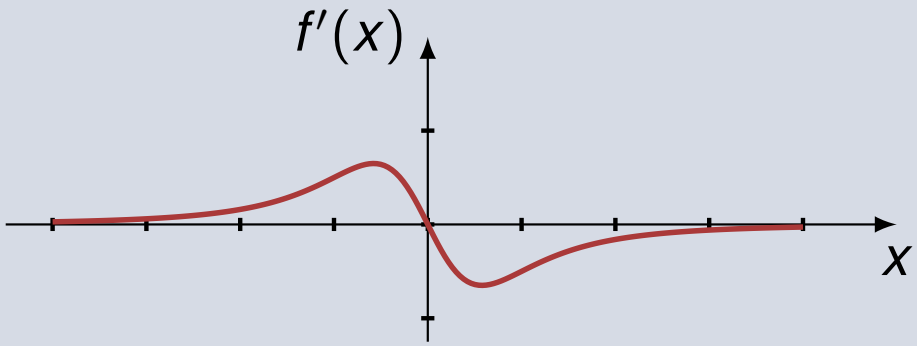
Un ejemplo más...

Ejemplo 4: Derivada de una función par

Sea f una función par definida por $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$,



$f'(x)$ es una función ***impar***.



Se tiene que la derivada de f

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{1+(x+\Delta x)^2} - \frac{1}{1+x^2}}{\Delta x}$$
$$= -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

Notación

debido a que

$$y = f(x) \Rightarrow \Delta y = \Delta f.$$

se tiene que

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = D_x f(x).$$

Un importante resultado

Sea $f(x) = x^n$, entonces
$f'(x) = ?$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \mathbb{O}(\Delta^2 x) - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(nx^{n-1} + \mathbb{O}(\Delta x))}{\Delta x} \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}
$$

donde, del teorema del binomio se tiene que

$$\mathbb{O}(\Delta^2 x) = \binom{n}{2} x^{n-2}\Delta^2 x + \ldots + \binom{n}{n}\Delta^n x$$

Ejemplo:

$$\frac{d}{dx}[3x^2 - 5x^3] = 6x - 15x^2.$$

Derivada de la potencia

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

Para pensar...

La pendiente de la gráfica de $f(x) = |x|$ cambia abruptamente en $x = 0$. ¿existe la derivada de f en $x = 0$?. Si es así, ¿cuál es?, si no, ¿por qué no?.

Esta presentación esta basada en: David Jerison. *18.01SC Single Variable Calculus.* Fall 2010. Massachusetts Instituite of Technology: MIT OpenCourseWare, `https://ocw.mit.edu`. License: Gracias!!!